Mathematik 2, 3
Formelsammlung zu gew. Dgl'en

2012-07-01 v1.0.2

– Autor –

Matthias Kolja Miehl, miehl@w3hs.net

http://projects.w3hs.net/ma23_fs/

Lsgsverfahren für einzelne Dgl'en

n-fache Integration

Kl.: *Gewöhnliche Dgl*

Allg. Lösung

Anwendung: $y^{(n)} = f(x)$ ($f(x)$ kann auch konstant sein: $f(x) = 3$)

Lösungsweg:
1.: Differentialquotient allein auf eine Seite bringen
2.: n-fach integrieren (entsprechend der Ordnung der Dgl)

Spez. Lösung

Anwendung: Bei Vorgabe von Anfangsbedingungen für gew. Dgl'en n. Ordnung

Lösungsweg:
1. Einsetzen der Anfangsbedingungen in die allg. Lsg bzw. ihre Ableitungen
→ spezielle Konstanten (c_0, c_1, ... , c_n)
2. Einsetzen der spez. Konstanten in die allg. Lsg.
→ spezielle Lsg.

Trennung der Variablen

Kl: *Gewöhnliche Dgl 1. Ordnung*

Allg. Lösung

Anwendung: $y' = f(x) \cdot g(y)$ (z.B. $y' = \cos x \cdot y^2$)

Lösungsweg:
1. Ableitung ausführlich als *Quotient* der Differentiale schreiben
2. Versch. Variable (u. entsprechende Differentiale) auf versch. Seiten bringen ($\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ dabei jeweils im Zähler!)
3. Integrieren
4. Auflösen nach der abhängigen Variablen (falls möglich) (hier: y)

Variation der Konstanten

Kl: *Inh. lin. gew. Dgl n. Ordnung mit var. oder konst. Koeffiz.*

Sonderfall: Dgl 1. Ordnung (Allg. Lösung)

Anwendung: $y' + f(x) \cdot y = S(x)$ (z.B. $y' + x \cdot y = x$; *kein* gemischtes Produkt yy', da *nicht* linear)

Lösungsweg:
1. Zu lösende Dgl homogenisieren (Stör-Fkt abspalten)
2. Lösen des homogenen Teils; allg. Lsg einer hom. lin. Dgl 1. Ordnung: $y_h = c_1 \cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
3. Berücksichtigen der Stör-Fkt durch
   a) Variation der allg. Konstante in der Lösung des homogenen Teils: $c_1 \to c_1(x)$
   b) 1-faches Differenzieren der *allg. Lösung des homogenen Teils mit variierter Konstante*
   c) Einsetzen der Ergebnisse von a) und b) in die inhomogene Dgl (soweit dort einsetzbar)
   Kontrollstelle: Hier fallen stetst zwei Summanden weg
   d) Bestimmen der *variierten Konstante* durch Integrieren: $c_1(x) = \int\big(S(x) \cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\big)\mathrm{d}x + c_2$
   e) Einsetzen des für die variierte Konstante gefundenen Wertes in die
   allg. Lösung des hom. Teils mit variierter Konstante $\to y = \left(\int\big(S(x) \cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\big)\mathrm{d}x + c_2\right) \cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$

Bemerkung: Dieses Verfahren berücksichtigt nur die Stör-Fkt.
Es muss also immer mit einem anderen Verfahren zur Lösung des homogenen Teils gekoppelt werden.

Sonderfall: Dgl 1. Ordnung (Allg. Lösung) ($f(x) = a = \text{konst.}$)

Anwendung: $y' + a \cdot y = S(x)$ mit $a \neq 0$ (z.B. $y' + y = x$; *kein* gemischtes Produkt yy', da *nicht* linear)

Lösungsweg:
1. Abspalten der Stör-Fkt
2. Lösen des homogenen Teils; allg. Lsg einer hom. Dgl 1. Ordnung mit $f(x) = a$: $y_h = c_1 \cdot e^{-ax}$
3. Berücksichtigen der Stör-Fkt wie im *allgemeinen* Fall (s. o.) oder durch einen speziellen Störansatz:
   a) Geg. Stör-Fkt $S(x)$ ausführlich schreiben
   b) Prüfen, ob Fall S1 oder S2 vorliegt (s. Tabelle weiter hinten)
   c) Erstellen des speziellen Störansatzes. Hierbei ist für den Fall S1 folgendes zu beachten:
   $\gamma \neq -a$: $y_s = e^{\gamma x} A_1(x)$ (keine Resonanz)
   $\gamma = -a$: $y_s = e^{\gamma x} x A_1(x)$ (1-fache Resonanz)
   d) 1-faches Differenzieren des speziellen Störansatzes
   e) Einsetzen des speziellen Störansatzes und seiner Ableitungen in die inh. Dgl (soweit erforderlich)
   f) Ermitteln der speziellen Koeffizienten des speziellen Störansatzes
   g) Einsetzen der gefundenen speziellen Koeffizienten in den speziellen Störansatz → spezielle Lsg y_s
4. Gesamtlösung bestimmen durch Addieren der Lsg des hom. Teils und der gefundenen spez. Lsg
   $\to y = y_h + y_s$

Dgl n. Ordnung (Allg. Lösung)

Anwendung: $f_n(x)\,y^{(n)} + f_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + f_2(x)\,y'' + f_1(x)\,y' + f_0(x)\,y = S(x)$ (z.B. $y''' = 1$)

Lösungsweg:
1. Abspalten der Stör-Fkt
2. Lösen des homogenen Teils
3. Berücksichtigen der Stör-Fkt durch
   a) Variation *aller* allg. Konstanten in der Lösung des homogenen Teils
   b) n-faches Differenzieren der *allg. Lösung des homogenen Teils mit variierten Konstanten*
   Durch Einführen zusätzlicher Bedingungen vermeiden, dass *höhere* Ableitungen der var. Konst. entstehen
   c) Einsetzen der Ergebnisse von a) und b) in die inhomogene Dgl (soweit dort einsetzbar)
   d) Zusammenstellen der n Gl'en mit den n unbekannten Fkt'en $c_1'(x)$ bis $c_n'(x)$.
   Es sind die $n-1$ zusätzl. Bdgn und die geg. Dgl, nachdem die Ableitungen dort eingesetzt worden sind
   e) Auflösen der n Gl'en, um $c_1'(x)$ bis $c_n'(x)$ zu erhalten
   f) Integrieren von $c_1'(x)$ bis $c_n'(x)$, um $c_1(x)$ bist $c_n(x)$ zu erhalten
   g) Einsetzen der für die variierten Konstanten gefundenen Werte in die *allg. Lsg d. hom. Teils mit var. Konst.*

Bemerkung: Ist $S(x)$ bei inh. lin. gew. Dgl'en mit *konst.* Koeffiz. intervallweise unterschiedlich, so bietet sich u. a. die Lösung mittels Laplace-Transformation an.

Substitution

Kl: *Gew. Dgl n. Ordnung*

Allg. Lösung

Anwendung: Viele verschiedene Substitutionen sind möglich. Hier einige Beispiele:

Gleichung	Substitution(s-Gl)	Neue Dgl / Lsgsweg (statt 2. u. 3.)
$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogene Dgl)	$z = \frac{y}{x}$	$z' = \frac{f(z)-z}{x}$ 1. T. d. V. 2. Rücksubstitution
$y' = f(ax+by+c)$	$z = ax+by+c$	$z' = a + b\cdot f(z)$ 1. T. d. V. 2. Rücksubstitution
$y^{(n)} = f(y^{(m)};x)$ mit $n > m$ (Reduktion der Ordnung)	$z = y^{(m)}$	
$y' = y\cdot f(x) + y^n \cdot g(x)$ mit $n \neq 1$ (Bernoulli'sche Dgl)	$z = y^{1-n}$	$z' = (1-n)\,f(x)\cdot z + (1-n)\,g(x)$ 1. lin. Dgl 2. Rücksubstitution

Lösungsweg:
1. Substituieren (passende Substitution ermitteln)
2. Innerhalb der Substitution:
   a) Auflösen der Substitutions-Gl nach der ursprünglichen abhängigen Variablen
   b) Ableitung(en) der ursprünglichen abhängigen Variablen bilden (entsprechend der Ordnung der geg. Dgl)
3. Einsetzen der Subst-Gl u. d. Abltg(en) der nach der ursprünglichen abh. Var. aufgelösten Subst. in die geg. Dgl
   → Neue Dgl mit der alten unabhängigen und einer neuen abhängigen Variablen
4. Lösen dieser neuen Dgl (oft mittels T. d. V. oder V. d. K.)
5. Rücksubstituieren
6. Auflösen nach der abhängigen Variablen (hier: y) (falls möglich)

Nichtlin. Dgl'en 1. Ordnung

Kl: *Inh. nichtlin. gew. Dgl 1. Ordnung mit var. oder konst. Koeffiz.*

Trennung der Variablen

Anwendung: $y' = f(x)\cdot g(y)$ (z.B. $y' = \cos x \cdot y^2$)

Lösungsweg:
1. Ableitung ausführlich als *Quotient* der Differentiale schreiben
2. Versch. Variable (u. entsprechende Differentiale) auf versch. Seiten bringen ($\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ dabei jeweils im Zähler!)
3. Integrieren
4. Auflösen nach der abhängigen Variablen (falls möglich) (hier: y)

Variation der Konstanten

Anwendung: $y' + f(x)\cdot g(y) = S(x)$

Lösungsweg:
1. Abspalten der Stör-Fkt
2. Lösen des homogenen Teils mit T. d. V.
3. Berücksichtigen der Stör-Fkt durch
   a) Variation der allg. Konstante in der Lösung des homogenen Teils: $c_1 \to c_1(x)$
   b) 1-faches Differenzieren der *allg. Lösung des homogenen Teils mit variierter Konstante*
   c) Einsetzen der Ergebnisse von a) und b) in die inhomogene Dgl (soweit dort einsetzbar)
   Kontrollstelle: Hier fallen stetst zwei Summanden weg
   d) Bestimmen der *variierten Konstante* durch Integrieren
   e) Einsetzen des für die variierte Konstante gefundenen Wertes in die
   allg. Lösung des hom. Teils mit variierter Konstante

Bemerkung: Dieses Verfahren berücksichtigt nur die Stör-Fkt.
Es muss also immer mit einem anderen Verfahren zur Lösung des homogenen Teils gekoppelt werden.

Spezielle Ansätze

Spez. Ansatz, homogene Dgl'en (Allg. Lösung)

Kl: *Homog. lin. gew. Dgl n. Ordnung mit konst. Koeffiz.*

Anwendung: $y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \dots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$ mit $a_0, a_1, \dots =$ reell und konstant

Lsg der char. Gl		Allg. Lsg der Dgl	Fall
$k_m = \gamma$	reell	$y_h = e^{\gamma x} P_1(x)$	C1
$k_{m,m+1} = \gamma \pm \mathrm{i}\omega$	konj.-komplex	$y_h = e^{\gamma x}[P_1(x)\cos(\omega x) + P_2(x)\sin(\omega x)]$	C2

Lösungsweg:
1. Aufstellen der charakteristischen Gl
2. Ermitteln des Falles (C1 oder C2, 1-fach oder mehrfach)
3. Einsetzen der Ergebnisse der char. Gl in die allg. Lsg des entsprechenden Falles
   Grad des Polynoms $P_1(x)$: Anz. d. *gleichen* Lsg'en der char. Gl weniger 1
   Grade von $P_1(x)$ u. $P_2(x)$: Anz. d. *gleichen* konjugiert-komplexen Lsgs*paare* der char. Gl weniger 1
   (Anz. d. k-Werte in der Lsg der char. Gl entspricht der Anz. d. allg. Konstanten in der allg. Lsg der Dgl)
4. Ggf. addieren der entsprechenden Teillösungen

Spez. Störansatz, inhomogene Dgl'en mit Resonanz (Allg. Lösung)

Kl: *Inhomog. lin. gew. Dgl n. Ordnung mit konst. Koeffiz.*

Anwendung: $y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \dots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = S(x)$ mit einigen *spez.* Stör-Fkt'en und $a_0, a_1, \dots =$ reell u. konst.

Stör-Fkt	Störansatz	Bemerkung	Anwendung	Fall
$S(x) = e^{\gamma x} B_1(x)$	$y_s = e^{\gamma x} A_1(x)$	γ ist in $S(x)$ und y_s gleich	*spez. Fall*: möglich und günstig nur bei spez. $S(x)$ *ohne* trigonom. Anteil ($\omega = 0$)	S1
$S(x) = e^{\gamma x}[B_1(x)\cos(\omega x) + B_2(x)\sin(\omega x)]$	$y_s = e^{\gamma x}[A_1(x)\cos(\omega x) + A_2(x)\sin(\omega x)]$	γ und ω sind in $S(x)$ und y_s gleich	*allg. Fall*: möglich bei jedem der spez. $S(x)$, günstig nur bei spez. $S(x)$ *mit* trigonom. Anteil	S2

$B_1(x)$ und $A_1(x)$ sind Polynome in x mit in der Regel *gleichen* maximalen Potenzen (Graden); Ausnahme: Resonanzfall

Fehlt im Polynom der Stör-Fkt ein Glied niedrigerer Potenz, so muss es im Störansatz trotzdem angesetzt werden:
→ *kontinuierlicher Ansatz aller Elemente bis zur höchsten Potenz*

$B_1(x)$ und $B_2(x)$ können verschiedene Grade haben. Die Polynome $A_1(x)$ und $A_2(x)$ jedoch müssen untereinander den *gleichen Grad* haben, aber *verschiedene Koeffizienten*. Gewählt wird der *höhere* Grad von $B_1(x)$ und $B_2(x)$.

Ist die Stör-Fkt einer Dgl eine Summe aus mehreren verschiedenen Stör-Fkt'en, so muss *jede* Stör-Fkt für sich berücksichtigt werden. Die Gesamtlösung der Dgl ist die Summe aus der Lsg des homogenen Teils und den Lsg'en, die durch die speziellen Störansätze gefunden werden: $y = y_h + y_{S1} + y_{S2} + \dots + y_{Sn}$

Unter dem Begriff *Teil-Dgl* ist folgendes zu verstehen: Dieser Störansatz und seine Ableitungen werden nicht in die *gesamte* vorgegebene inhomogene Dgl eingesetzt, sondern nur in einen *Teil* hiervon. Dieser Teil besteht aus dem homogenen Teil der geg. Dgl und der gerade betrachteten Stör-Fkt.

Es liegt *Resonanz* vor, wenn die Lsg des homogenen Teils der Dgl oder Teile davon und die Stör-Fkt gleiches γ *und* ω haben. Treten gleiches γ *und* ω in der Lsg des homogenen Teils bzw. der char. Gl n-fach auf, so liegt n-fache Resonanz vor.

Zusammentreffen		Resonanz	
Lsg hom. Teil bzw. Lsg char. Gl	Stör-Fkt	Möglichkeit	Überprüfung
C1	S1	ja	γ
C2	S2		γ, ω
C1	S2	nein	-
C2	S1		

Lösungsweg:
1. Abspalten der Stör-Fkt
2. Lösen des homogenen Teils → y_h
3. Berücksichtigen der Stör-Fkt durch speziellen Störansatz
   a) Geg. Stör-Fkt $S(x)$ ausführlich schreiben
   b) Prüfen, ob Fall S1 oder S2 vorliegt
   c) Erstellen des (im Falle der Resonanz vorläufigen) speziellen Störansatzes
   d) Prüfen, ob Resonanz möglich (durch Vergleich der Stör-Fkt mit der Lsg des homogenen Teils)
   e) Falls ja: Prüfen, ob Resonanz vorhanden ist und ggf. Störansatz korrigieren
      (mit Faktor x^n multiplizieren, wobei n angibt, wievielfache Resonanz vorliegt)
      → endgültiger spezieller Störansatz
   f) Differenzieren des speziellen Störansatzes entsprechend der Ordnung der Dgl
   g) Einsetzen des speziellen Störansatzes und seiner Ableitungen in die inh. Dgl (soweit erforderlich)
   h) Ermitteln der speziellen Koeffizienten des speziellen Störansatzes (Koeffizientenvergleich)
   i) Einsetzen der gefundenen speziellen Koeffizienten in den speziellen Störansatz → spezielle Lsg y_s
4. Gesamtlösung bestimmen durch Addieren der Lsg des hom. Teils und der gefundenen spez. Lsg
   → $y = y_h + y_s$

Bemerkungen:
1. Nur zur Berücksichtigung der Stör-Fkt
2. Lsg des hom. Teils u. Stör-Fkt möglichst ausführlich schreiben → Resonanzfälle leichter zu erkennen
3. Es brauchen nur die Störansätze von den Stör-Fkt'en korrigiert zu werden, bei denen Resonanz auftritt.
4. Alternativlösungsweg: V. d. K.; hier: Resonanz muss nicht speziell berücksichtigt werden