Mathematik 2, 3
Formelsammlung zur Logik

2012-07-01 v1.0.2

– Autor –

Matthias Kolja Miehl, miehl@w3hs.net

http://projects.w3hs.net/ma23_fs/

Aussagenlogik

$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$ $\qquad \wedge\ \cap\ \cdot$ Schnittmenge $\qquad \vee\ \cup\ +$ Vereinigungsmenge

Logische Identitäten

$(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ Nur bei $1 \rightarrow 0$ Null. Immer bei $0 \rightarrow \ldots$ Eins.
$(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\big)$

$\big((A \vee B) \wedge A\big) \Leftrightarrow A$ $\qquad \big((\neg A \vee B) \wedge A\big) \Leftrightarrow (A \wedge B)$ $\qquad \big((A \vee \neg B) \wedge \neg A\big) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
$\big((A \vee B) \wedge \neg A\big) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B)$ $\qquad \big((\neg A \vee B) \wedge B\big) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B)$

$\big(A \wedge (B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big)$ $\qquad \big((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)\big) \Leftrightarrow (\neg A \vee B \vee C)$
$\big((A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)\big) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ $\qquad \big((A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \vee \neg B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee \neg A) \wedge (B \vee C)\big)$

Bsp. f. 1. Ers-Th.: $\big((A \wedge B) \vee (C \wedge D)\big) \Leftrightarrow \Big(\big(A \vee (C \wedge D)\big) \wedge \big(B \vee (C \wedge D)\big)\Big) \Leftrightarrow \big((A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)\big)$
Bsp. f. 2. Ers-Th.: $\big((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((\neg A \wedge B) \vee C\big)$
C ausklammern: $\big((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee C)\big) \Leftrightarrow \Big(C \vee \big((A \vee B) \wedge \neg A\big)\Big)$ Wenn man ausmultipliziert, dann alles ausmultiplizieren!

Sprachgefühl

Wenn A, *dann* B	$(A \rightarrow B)$
Wenn A, *dann niemals* B	$(A \rightarrow \neg B)$
Wenn A, *dann* von B und C nur B	$\big(A \rightarrow (B \wedge \neg C)\big)$
Nur wenn A, *dann* B	$(B \rightarrow A)$
Nur dann ohne A, *wenn* B	$(\neg A \rightarrow B)$
Eigentlich immer B, außer (vllt.) wenn A	$(\neg B \rightarrow A)$
A jedenfalls *dann*, *wenn* von B und C *höchstens eines*	$\big((\neg B \vee \neg C) \rightarrow A\big)$
A *nur dann,wenn* nicht B und C	$\big(A \rightarrow \neg(B \wedge C)\big)$
Entweder A *oder* B	$\big((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)\big)$
Entweder A und B *oder* keins von beidem	$\big((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)\big) \Leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$
Mindestens A *oder* B	$(A \vee B)$
Nicht gleichzeitig A und B (höchstens eines von beidem)	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
Keins von beidem	$(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$

Prädikatenlogik

$\forall,\ \exists,\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$ $\qquad \forall x\, \exists y\, P(x,y) \not\Leftrightarrow \exists y\, \forall x\, P(x,y)$ $\qquad \exists x\, \big(S(x) \wedge I(x)\big)$ $\qquad \forall x\, \big(S(x) \rightarrow I(x)\big)$

$\neg\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$ $\qquad \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Leftrightarrow \forall x\, \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ $\qquad \exists x\, \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$
$\neg\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$ $\qquad \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \Leftrightarrow \exists x\, \big(P(x) \vee Q(x)\big)$ $\qquad \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \Rightarrow \forall x\, \big(P(x) \vee Q(x)\big)$

Binäre Relationen $(R \subseteq X \times Y)$

Gegenbeispiele finden, da bereits ein Gegenbeispiel zur Widerlegung genügt!

Spezielle Eigenschaften

linkstotal	$\forall x\, \exists y : (x,y) \in R$	Für y erlaubte Zahlen aus Zahlenmenge einsetzen und prüfen, ob alle möglichen x-Werte erreicht werden können.
surjektiv	$\forall y\, \exists x : (x,y) \in R$	Für x erlaubte Zahlen aus Zahlenmenge einsetzen und prüfen, ob alle möglichen y-Werte erreicht werden können.
injektiv	$\forall x_1\, \forall x_2\, \forall y : \big((x_1,y) \in R \wedge (x_2,y) \in R \Rightarrow (x_1 = x_2)\big)$	Jedem Element $\in$ Y genau/höchstens ein Element $\in$ X zugeordnet.
rechtseindeutig	$\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2 : \big((x,y_1) \in R \wedge (x,y_2) \in R \Rightarrow (y_1 = y_2)\big)$	Jedem Element $\in$ X genau/höchstens ein Element $\in$ Y zugeordnet.

Spezielle Typen

reflexiv	$\forall x\, \big((x,x) \in R\big)$	$I_A \subseteq R$	Elemente auf HD sind alles Einsen. *Jedes* Element steht mit sich selbst in Relation.
irreflexiv	$\forall x\, \big((x,x) \notin R\big)$	$R \cap I_A = \emptyset$	Elemente auf HD sind alles Nullen. *Kein* Element steht mit sich selbst in Relation. irreflexiv, wenn: asymmetrisch
symmetrisch	$\forall x\, \forall y\, \big((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R\big)$	$R = R^{-1}$	HD beliebig. Für *jedes* Element $(x,y) \in R$ gibt es auch ein Element $(y,x) \in R$.
asymmetrisch	$\forall x\, \forall y\, \big((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R\big)$ (irreflexiv und antisymmetrisch)	$R \cap R^{-1} = \emptyset$	HD nur Nullen. *Kein* Element $(x,y) \in R$ hat ein zugehöriges Element $(y,x) \in R$. *nicht* asymmetrisch, wenn: symmetrisch (außer bei $\emptyset$), nicht irreflexiv bzw. reflexiv
antisymmetrisch	$\forall x\, \forall y\, \big((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow (x = y)\big)$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	HD beliebig. Gegenbsp.: $\exists x\, \exists y\, \big((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \wedge (x \neq y)\big)$ antisymmetrisch, wenn: asymmetrisch
transitiv	$\forall x\, \forall y\, \forall z\, \big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R\big)$	$R \circ R \subseteq R$	Gegenbsp.: $\exists x\, \exists y\, \exists z\, \big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \wedge (x,z) \notin R\big)$ Für jede Eins in $M_{R \circ R}$ muss an der entspr. Stelle in M_R auch eine Eins sein.

Es gibt Relationen, die weder reflexiv noch irreflexiv sind, aber keine, die beides sind.
Es gibt Relationen, die weder symmetrisch noch asymmetrisch sind – $\emptyset$ ist beides.
Eine Relation kann sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch sein.
Totale Fkt.: linkstotal, rechtseindeutig $\qquad$ Partielle Fkt.: *nicht* linkstotal, rechtseindeutig $\qquad$ $\{$Def.-Bereich$\} \rightarrow \{$Wertebereich$\}$
Äquivalenzrelation: symmetrisch, reflexiv, transitiv $(R[a] = \{x \in A : (a,x) \in R\}$ Menge aller Elemente $\in$ A mit denen a in Relation steht.)
Ordnungsrelation: antisymmetrisch, reflexiv, transitiv $\big(x \leq_R y \mathrel{\widehat{=}} (x,y) \in R\big)$