# Mathematik 2, 3
# Formelsammlung zur Stochastik

2012-07-01 v1.0.2



– Autor –

Matthias Kolja Miehl, miehl@w3hs.net

http://projects.w3hs.net/ma23_fs/

# Kombinatorik

**n-Stichproben aus r-Grundgesamtheit**

| Anz. d. Abb. $f: N \to R$ | N unterscheidbar<br>R unterscheidbar | N <u>nicht</u> unterscheidbar<br>R unterscheidbar | |
|---|---|---|---|
| **beliebige Anz.**<br>von R Elementen | $r^n$ | $\binom{r+n-1}{n}$ | mit. . . |
| **injektiv** (linkseindeutig):<br>max. ein Element aus R | $\frac{r!}{(r-n)!} = r^{(n)}$ | $\frac{r^{(n)}}{n!} = \binom{r}{n}$ $(\lvert N\rvert \le \lvert R\rvert)$ | ohne. . . |
| **surjektiv** (rechtstotal):<br>mind. ein Element aus R | | $S_{(n,r)} = \left\{ {n \atop r} \right\}$ $(\lvert N\rvert \ge \lvert R\rvert)$ | ohne. . . |
| **bijektiv** $(\lvert R\rvert = \lvert N\rvert)$: genau<br>ein Element aus R und N | $n^{(n)} = n!$<br>$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$ | alle Elemente verschieden<br>je $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Elemente<br>gleich (Anz. d. Klassen k > 1) | ohne. . . |
| | Variation<br>geordnet | Kombination<br>ungeordnet | Wdhlg/<br>Rücklegen |

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_n$ | 1 | 0 | 1 | 2 | 9 | 44 | 265 | 1854 | 14833 |
| n! | 1 | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 | 40320 |

| $S_{(n,r)}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $[r]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | | 1 | | | | | | | | |
| 2 | | 1 | 1 | | | | | | | |
| 3 | | 1 | 3 | 1 | | | | | | |
| 4 | | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | | |
| 5 | | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | | |
| 6 | | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | | |
| 7 | | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | | |
| 8 | | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | |
| $[n]$ | | | | | | | | | | |

Anz. geordneter Zahlenpartitionen: $\binom{n-1}{r-1} - \binom{r}{1} \cdot \binom{n-1-m}{r-1} + \binom{r}{2} \cdot \binom{n-1-2m}{r-1} - \cdots$ $\quad (m = \text{max. Größe einer Zahlenpartition})$

Anz. surjektiver Abb.: $S_{(n,r)} \cdot k^{(r)}$; $k = r$ mit $r$=Anz. d. Halte, $k$=Anz. d. Etagen, $n$=Anz. d. Leute; *Sonst:* $k \neq r$ (*nicht* rechtstotal)

Anz. d. $n$-Permutationen einer $r$-Menge: $n!\binom{r}{n}$

# Stochastik

| | |
|---|---|
| **Klassischer W.-Raum**<br>(alle Erg. gleichw., Laplace-Münze) | $P(A) = \frac{g}{m} = g \cdot \frac{1}{m} = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{\text{Anz. günstiger Elementarereignisse}}{\text{Anz. möglicher Ergebnisse}} = \frac{1}{\text{Anz.}}$ ; Anz. mögl. Ereignisse: $2^{\lvert\Omega\rvert}$ |
| **Bedingte W.** | $P(A\vert B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{\text{W. des günstigsten Pfades}}{\Sigma \text{ d. W. aller Pfade, die zu } B \text{ führen}}$ |
| **Zufallsexperiment**<br>(Münzen, Würfel, Ziehen v. Kugeln) | $P(A_i\vert B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B\vert A_i)}{P(B)} = \frac{\text{W. des günstigen Pfades}}{\Sigma \text{ d. W. aller Pfade}}$ (Formel v. Bayes) |

## Wahrscheinlichkeitsverteilungen

| | kleines N | großes N $(n \to \infty)$ |
|---|---|---|
| mit Rücklegen | **Binomialverteilung** $(n\,p \le 10)$<br>$P(X = x) = f(x/n; p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$<br>Sonderfall: $= \binom{n}{x} 0.5^n$ | **Poissonverteilung** $\binom{p \to 0}{n \to \infty}$ $(n \ge 1500\,p)$<br>$f(x/\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \text{rel. W.} = \frac{n_v}{n}$ $\quad \lambda = n\,p = \mu = Var(x) = \frac{\text{Anz. Vork.}}{\text{Anz. Zeitint.}}$<br>$P(X_t = x) = \frac{(\lambda\, t)^x}{x!} e^{-\lambda\, t}$ (Poisson-Prozess) |
| ohne Rücklegen | **Hypergeometrische Verteilung**<br>$f(x/N, N_1, n) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ | **Binomialverteilung**<br>$\lim\limits_{N \to \infty} f(x/N, N_1, n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ ; $\quad \frac{N_1}{N} = p = const.$ |

### Mehrdimensionale diskrete W.-Verteilung

| | | |
|---|---|---|
| mit Rücklegen | $P(X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_k) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{N_2}{N}\right)^{x_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{N_k}{N}\right)^{x_k}$ | **Polynomialverteilung**<br>Verallg. Binomialverteilung |
| ohne Rücklegen | $P(X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_k) = \frac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2} \cdots \binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$ $\quad n = \sum\limits_k x_k \quad N = \sum\limits_k N_k$ | **Verallg. Hyperg. Vert.** |

### Normalverteilung

$f(x/\mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$F(x/\mu; \sigma^2) = \int_{-\infty}^{x} f(t/\mu; \sigma^2)\,\mathrm{d}t$

$P(X \le x) = F(x) = P(U \le u) = \Phi(u) \qquad P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x/\mu; \sigma^2)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

$P(X \ge x) = P(U \ge u) = 1 - \Phi(u) \qquad P(x_1 \le X \le x_2) = P(u_1 \le U \le u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$

W. dass sich $X$ weniger als $k\sigma$ von $\mu$ unterscheidet: $P(\lvert X - \mu\rvert \le k\sigma) = P(\lvert U\rvert \le k) = 2\Phi(k) - 1$

### Standardnormalverteilung $\quad (\Phi(-u) = 1 - \Phi(u))$

$\varphi(u) = f(u/0; 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \qquad U = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad P(U \le c) = \Phi(c) \qquad P(a \le U \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

$\Phi(u) = F(u/0; 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \qquad U = \frac{(X-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \qquad P(U \ge c) = 1 - P(U \le c) \qquad P(-c \le U \le c) = P(\lvert U\rvert \le c) = 2\Phi(c) - 1$

**Quantile der Standardnormalverteilung** $\quad (-u_p = u_{1-p})$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Vorgegebene W.: $p$ | $P(U \le c) = \Phi(c) = p$ | $[\Phi(c) = p \quad \to c = u_p]$ | $P(U \le u_p) = \Phi(u_p) = p$ |
| Zugehöriges Quantil: $u_p$ | $P(U \ge c) = 1 - P(U \le c) = p$ | $[\Phi(c) = 1 - p \quad \to c = u_{1-p}]$ | $P(U \le 1{,}645) = 95\%, \quad u_{0,95} = 1{,}645$ |
| | $P(-c \le U \le c) = 2\Phi(c) - 1 = p$ | $\left[\Phi(c) = \frac{1+p}{2} \quad \to c = u_{(1+p)/2}\right]$ | $P(u_1 \le U \le u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$ |

$F(X) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} 1 \qquad \mathrm{E}(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_i x_i f(x_i) \qquad \mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x^2)\,\mathrm{d}x$

$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X) \qquad \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(X \cdot Y) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$

**Zum Binomialkoeffizienten**

$\binom{r}{n} = \frac{r!}{n!\,(r-n)!} = \binom{r}{r-n} \;\Vert\; \binom{r}{0} = \binom{r}{r} = 1 \qquad \binom{r}{1} = \binom{r}{r-1} = r \qquad \binom{r}{r+1} = 0 \;\Vert\; \binom{r}{n} = \binom{r-1}{n-1} + \binom{r-1}{n} \qquad \text{Sym.: } \binom{r}{n} = \binom{r}{r-n} \qquad \text{Sum.: } \binom{r}{n} + \binom{r}{n+1} = \binom{r+1}{n+1}$

$\sum\limits_{n=0}^{r} \cdot \binom{r}{n} = 2^r \qquad n \cdot \binom{r}{n} = r \cdot \binom{r-1}{n-1} \qquad \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{S}{n-k} = \binom{r+S}{n}$ (Vandermond'sche Id.) $\qquad \sum\limits_{k=0}^{r} \binom{k}{n} = \binom{r+1}{n+1} \qquad \sum\limits_{k=0}^{r} \binom{n+k}{n} = \binom{r+n+1}{n+1} \qquad \sum\limits_{n=0}^{r} \binom{n+k}{n} = \binom{k+r+1}{r}$

# Notizen

$r$-Partition: Zerlegung in $r$ (disjunkte) Einzelblöcke
$r$-Permutation: Permutation von $r$ Elementen (Permutation: Jede Anordnung von $n$ Elementen in einer bestimmten Reihenfolge)

---

$r^n$
Anz. d. Mögl. $n$-Mal *unter Beachtung der Reihenfolge* ein Element *mit Rücklegen* aus einer Menge vom Umfang $r$ auszuwählen.
*Bsp.:* Anz. d. mögl. Binärzahlen: $2^n$; $r = 2$ Zustände $\{0, 1\}$ aus denen $n$ mal gewählt wird ($n \mathrel{\widehat{=}}$ Länge bzw. Stellen der Zahl).
(Bei erster Stelle zwei Möglichkeiten sich zu entscheiden, bei zweiter wieder zwei ($2 \cdot 2$ Möglichkeiten) ...)

$r^{(n)}$ (Faktorielle Potenz)
Anz. d. Mögl. $n$-Mal *unter Beachtung der Reihenfolge* ein Element *ohne Rücklegen* aus einer $r$-Menge auszuwählen.
*Bsp.:* Anz. d. Mögl. für die ersten $n$ Zieleinläufe von $r$ Läufern.
*Sonderfall:* $r = n \to n^{(n)} = n!$ : Anz. d. Mögl. für verschiedene Zieleinläufe von $n$ Läufern, wenn alle ins Ziel kommen ($n$ Zieleinläufe).

---

$\binom{r}{n} = \frac{r^{(n)}}{n!}$ ($|N| \leq |R|$) (Binomialkoeffizient)
Anz. d. Mögl. *ohne Beachtung der Reihenfolge* und *ohne Rücklegen* $n$ Elemente aus $r$ auszuwählen. Anz. d. $k$-Teilmengen einer $n$-Menge
$n \mathrel{\widehat{=}}$ Anz. d. Mögl. (aus R) auszuwählen $r \mathrel{\widehat{=}}$ Anz. der Elemente aus denen ich auswählen kann
*Bsp.:* Anz. d. Mögl. $n$ Kugeln auf $r$ Zellen zu verteilen. (jede Zelle max. nur eine Kugel, Reihenfolge egal – Ergeb. zählt) $|\cdot| \;\; |\cdot|\cdot| \;\; |$
*Bsp.:* {Spatzen} → {Stromleitungen}, {Kugeln} → {Zellen}, {Plätze im Straus} → {Blumentypen}

$\binom{r}{2}$ (Permutation + Vertauschungen)
Anz. d. möglichen Vertauschungen bei $r$ Elementen. Jede $r$-Permutation kann mit max. $r - 1$ Vertauschungen realisiert werden.

$\binom{r+n-1}{n}$
Anz. d. Mögl. *ohne Beachtung der Reihenfolge* und *mit Wiederholung* $n$-Elemente aus $r$ Elementen auszuwählen.
*Bsp.:* Das gleiche wie der Binomialkoeffizient, doch nun mehrere Kugeln in einer Zelle erlaubt. $|\cdot| \;\; |::|:\cdot| \;\; | \mathrel{\widehat{=}} 011000010001$

$\binom{r+n-1}{r-1}$
*Bsp.:* Anz. d. Mögl. 4 Einsen auf 10 Stellen zu verteilen. $(n + r - 1)$-stellige Dualzahl mit $(r - 1)$ Einsen/Trennwände, $r$ Kästchen

$P_{n,k} = \binom{n-1}{r-1}$
Anz. d. geordneten Zahlenpartitionen: Anz. d. Mögl. $n$ aus $r$ Partitionen / Zahlen zusammenzusetzen (geordnet).
*Bsp.:* Anz. d. Mögl. die Zahl $n$ in $r$ Zahlenpartitionen einzuteilen: $\binom{4-1}{2-1} = 3$ und zwar $(3 + 1) = (1 + 3) = (2 + 2)$

Max. Größe einer Partition / Zahl auf $m$ beschränken: $\binom{n-1}{r-1} - \binom{r}{1} \cdot \binom{n-1-m}{r-1} + \binom{r}{2} \cdot \binom{n-1-2m}{r-1} - \cdots$
*Bsp.:* Anz. d. Mögl. mit 3 Würfeln die Augenzahl 8 zu werfen: $n = 8$, $r = 3$, $m = 6$
*Hier:* Beschränkung der max. Größe einer Zahlenpartition auf die max. Augenzahl eines Würfels ($m = 6$).
*Bsp.:* Parlament: $n = 23$ Sitze; $r = 3$ Parteien; max. Größe einer Partei ist $m = 11$, um eine absolute Mehrheit zu verhindern.

---

$n^{(n)} = n!$
Anz. d. Mögl. $n$ Elemente *unter Beachtung der Reihenfolge* und *ohne Rücklegen* in verschiedene Reihenfolgen zu bringen.
*Bsp.:* Anz. d. Mögl. für verschiedene Zieleinläufe von $n$ Läufern, wenn alle ins Ziel kommen ($n$ Zieleinläufe).

$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ (Multinomialkoeffizient)
Anz. d. Mögl. $n$ Elemente bestehend aus $k > 1$ Klassen in unterschiedliche Reihenfolgen zu bringen. Verallg. Binomialkoeff. für $k > 1$
*Bsp.:* Anz. d. Mögl. aus ABRAKADABRA durch Vertauschen der Buchstaben neue Wörter zu bilden: $\frac{11!}{5!\,2!\,2!\,1!\,1!}$
*Bsp.:* Anz. d. Mögl. $n_1$ rote und $n_2$ schwarze Kugeln auf $n = n_1 + n_2 + n_3$ Zellen zu verteilen mit $n_3$ leeren Zellen.

$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \qquad \lim_{n\to\infty} D_n = \frac{n!}{e}$
Fixpktfreie Permutationen: Anz. d. Mögl. $n$ Objekte $n$ anderen Objekten zuzuordnen, ohne dass die Nummern von zwei Objekten übereinstimmen.
*Bsp.:* Anz. d. Mögl. für Zieleinläufe, bei denen der Läufer mit der Nr. 1 nicht an erster Stelle, der Läufer mit der Nr. 2 nicht an zweiter Stelle usw. einläuft / einlaufen soll, darf.

$n!\binom{r}{n}$
Anz. d. $n$-Permutationen einer $r$-Menge: Anz. d. Permutationen von $n$ Elementen einer Menge vom Umfang $r$
*Bsp.:*

$S_{(n,r)} = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r} \left[(-1)^{r-i}\binom{r}{i} i^n\right] = \left\{ {n \atop r} \right\}$ ($|N| \geq |R|$) (Mengenpartition, Stirlingzahl 2. Art)
Anz. d. $r$-Partitionen einer $n$-Menge (ohne Rücklegen, ungeordnet): Anz. d. Mögl. eine $n$-Menge in $r$ disjunkte Teilmengen einzuteilen.
Anz. d. Mögl. $n$ Objekte in Partitionen vom Umfang $n$ einzuteilen.
*Bsp.:* $n$ Studenten sollen $r$ Arbeitsgruppen bilden.
*Bsp.:* $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$ : {A B}{C D}, {A C}{B D}, {A D}{C B}, {A B C}{D}, {A B D}{C}, {A C D}{B}, {B C D}{A}

$\left\{ {n \atop r} \right\} = \left\{ {n-1 \atop r-1} \right\} + r \left\{ {n-1 \atop r} \right\}$ Sonderwerte: $S_{(n,1)} = 1 \quad S_{(n,2)} = 2^{n-1} - 1$
$S_{(n,n)} = 1 \quad S_{(n,n-1)} = \binom{n}{2}$

$S_{(n,r)} \cdot k^{(r)}$
*Bsp.:* Anz. d. Mögl. für einen Fahrstuhl zu halten: $r =$ Anz. d. Halte, $k =$ Anz. d. Etagen, $n =$ Anz. d. Leute
$k = r$ : Anz. surjektiver Abb. $f : N \to R$ $|N| \geq |R|$ (rechtstotal, jedes Element $\in R$ mind. 1-mal)
*Bsp.:* Fahrstuhl hält auf allen Etagen
$k \neq r$ : *nicht* rechtstotal
*Bsp.:* Fahrstuhl hält *nicht* auf allen Etagen
($r^n$ Mögl. insg.)

Papula FS, S. 367 ff.

# Axiome und Sätze

## Poisson-Verteilung

1. Die W. für $x$ Signale in einem Zeitinterval der Länge $t$ hängt nur von $x$ und $t$ ab, nicht von der Lage des Zeitintervalls auf der Zeitachse.
2. Die Anz. der Signale in disjunkten Zeitintervallen sind unabhängige Zufallsgrößen.
3. Die W. für mehr als ein Signal in einem kleinen Zeitintervall der länge $\Delta t$ ist von kleinerer Größenordnung als $\Delta t$.

## Totale W., Formel von Bayes

1. Multiplikationssatz: Die W. dafür, dass ein bestimmter Pfad durchlaufen wird, ist gleich dem Produkt der W. längs des Pfades.
2. Satz v. d. totalen W.: Die W. eines Ereignisses ist gleich der Summe der W. aller Pfade, die zu diesem Ereignis führen.

## Additionssatz

disjunkt: $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + (A_2)$

nicht disjunkt: $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2)$

$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cdot A_2) - P(A_1 \cdot A_3) - P(A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$

## Multiplikationssatz

$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \qquad P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2)$

## Faltungssatz

$P(X_1 + X_2 = k) = \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)} \cdot \frac{(\mu_1+\mu_2)^k}{k!}$ wenn $X_1$ und $X_2$ poisson-verteilt mit $\mu_1$ und $\mu_2$

$\mathrm{E}(aX \pm bY) = a\mathrm{E}(X) \pm b\mathrm{E}(Y)$

$\mathrm{Var}(aX \pm bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) \pm 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$

# Rest

## Vergleiche

*Binomialkoeffizient:* keine Elemente aus N, alles *eine* Klasse
*Multinomialkoeffizient:* mind. 2 Klassen, Klassen mit bloß einem Element sind möglich

Klassenelemente *nicht* unterscheidbar; Klassen untereinander unterscheidbar

$\binom{r}{n}$ : Anz. d. Mögl. $n$ Elemente auf $r$ Elemente zu verteilen (max. ein Element $\in$ N je Element $\in$ R)
$\left\{ n \atop r \right\}$ : Anz. d. Mögl. eine Menge vom Umfang $n$ in disjunkte Teilmengen vom Umfang $r$ zusammenzufassen

## Erklärung

### Poisson-Verteilung

*Bsp.:* Huftritt

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | Anz. d. toten Soldaten |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 15 | 11 | 6 | 2 | 0 | ... | Anz. d. Jahre, in denen entsprechend viele Soldaten durch Huftritt starben |

Die Anzahl der Jahre kann man sich auch als Anzahl von Zettelchen vorstellen, die mit der Jahreszahl bedruckt sind und in nummerierte Kästchen gelegt werden.

Mittelwert: $\lambda = E(x) = \frac{\text{Anz. d. Vorkommnisse}}{\text{Anz. Zeitintervalle}} = \frac{15\cdot0+11\cdot1+6\cdot2+2\cdot3+0\cdot4+\cdots}{5+4+2+0+1+\cdots}$

$f(x/\lambda)$ = Wahrscheinlichkeit für $x$ Tote in einem Zeitintervall (z. B. der Dauer eines Jahres)